

P10 . 飽和・不飽和浸透流逆解析プログラムによる数値実験

Numerical experiment of saturated-unsaturated flow inverse analysis program

○井上準也・増本清（島根大学大学院）

1. はじめに

地下水の挙動を定量的に評価するために、数値解析が電子計算機の進歩とともに有力な手段として用いられている。数値解析では現地調査によって得られた水理物性値等の情報をもとに水頭値変化を予測する順解析が主流であるが、コスト面や技術面の問題から現地調査によって得られる情報量には限界がある。そこで、観測された水頭値から水理物性値を推定する逆解析手法が不足した情報量を補うのに効果的である。逆解析には計算時間が膨大になるという問題が存在するが、この問題については準ニュートン法と adjoint 法を用いた解析ルーチンにより大幅に改善できることが示されている（増本ほか(1998) ¹⁾。

しかし、従来の逆解析では飽和領域内の地下水挙動を対象としているため自由地下水面より上部の不飽和領域は考慮されないことが多い。しかし、対象領域の深度が浅い場合には自由地下水面の変動が数値解析に影響をおよぼすと考えられるため、飽和領域のみの解析ではその精度に十分な成果を期待できない。

そこで本研究では、飽和・不飽和領域を対象とした順解析プログラムを組み込んだ飽和・不飽和浸透流逆解析プログラムを作成し、数値実験による妥当性を検討した。

2. 解析方法の概要

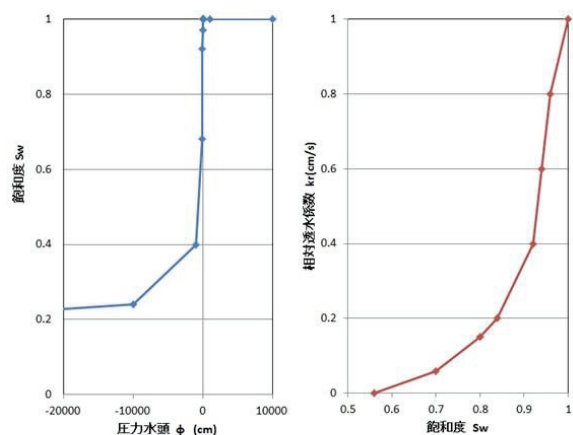
2.1 順解析法

飽和・不飽和領域での流れの方程式は、ダルシーの法則と質量保存則を用いて以下のように表される。

$$F(x, y, z, t) = \nabla \cdot [Kk_r\{S_w(\varphi)\}\nabla \cdot (\varphi + z)] + Q - (C_s(\varphi) + \alpha S_s) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0: \text{不飽和領域} \\ 1: \text{飽和領域} \end{cases}$$

ここで、 K :絶対透水係数(m/s), k_r :相対透水係数(m/s), S_w :水の飽和度, φ :圧力水頭(m), z :鉛直方向の位置座標(m), Q :揚水量(m³/s), C_s :比水分容量, S_s :比貯留係数(1/m), t :時間(s). また、式(1)中の不飽和浸透特性値 k_r , S_w , C_s には細粒度の典型的な相対透水係数と飽和度の曲線(P. S. フヤコーン&G. F. ピンダー(1987)) ²⁾を参考に作成した折れ線グラフを使用した(図-1).



(a) 圧力水頭に関する飽和度 (b) 飽和度に関する相対透水係数

図-1. 不飽和浸透特性値

解析手法には有限差分法を使用した。飽和・不飽和浸透流では図-1 で示される強い非線形性を持つ不飽和浸透特性値を使用するため有限差分法によって時間と空間について離散化した式が非線形連立方程式として表される。そこで非線形連立方程式の解法にはニュートン法を使用した。以上の手法を用いて順解析プログラムを作成した。

2.2 逆解析法

逆解析は、順解析による計算圧力水頭と観測圧力水頭の重み付残差二乗和からなる目的関数を最小化する未知パラメータベクトルを求める非線形最小化問題を解くことになる。本研究では準ニュートン法(茨木俊秀&福島雅夫(1991))³⁾を適用し逆解析プログラムを作成した。目的関数は以下のように表される。

$$J = \sum_{n=1}^{NT} \sum_{i=1}^{NL} W_i (\varphi_{cal_i} - \varphi_{obs_i})^2 \quad (2)$$

ここで、 n : 時間ステップ、 i : 観測節点番号、 NT : 時間ステップ数、 NL : 観測点数、 W_i : 重み、 φ_{cal_i} : 順解析の計算圧力水頭、 φ_{obs_i} : 観測圧力水頭。

作成した逆解析プログラムでは、最初に観測圧力水頭や境界条件、未知パラメータの初期推定値を入力し、順解析プログラムによって計算圧力水頭を求める。次に求めた計算圧力水頭と観測圧力水頭から目的関数を求め収束判定を行う。目的関数が収束すれば解析終了、収束しなければ勾配計算を行い未知パラメータを修正した後に再度計算圧力水頭を求める。以後この作業を繰り返す。

2.3 adjoint 法

制約条件付非線形最小化問題の解法として勾配法を用いる場合、目的関数の勾配、すなわち目的関数の各未知パラメータについての微分値を求める必要がある。本研究では勾配計算に adjoint 法を使用した。adjoint 法とはラグランジュ乗数法の考え方を用いて勾配を計算する方法である。adjoint 法のより詳しい仕組みについては増本(2004)⁴⁾などを参照されたい。ラグランジュ関数は次のように定義される。

$$L = J + \sum_{n=1}^{NT} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} \sum_{r=1}^{NZ} \lambda_{p,q,r}^n \cdot f_{p,q,r}^n \quad (3)$$

ここで、 $\lambda_{p,q,r}^n$: ラグランジュ乗数、 $f_{p,q,r}^n$: 支配方程式 $F(x, y, z, t) = 0$ を離散化した式、 p, q, r : 節点番号、 NX : x 軸方向の格子点数、 NY : y 軸方向の格子点数、 NZ : z 軸方向の格子点数。随伴方程式は次式となる。

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_{p,q,r}^n} = 0 \quad (4)$$

$$(n = 1, 2, \dots, NT, \quad p = 1, 2, \dots, NX, \quad q = 1, 2, \dots, NY, \quad r = 1, 2, \dots, NZ)$$

式(3)の各時間各位置における圧力水頭 φ による微分値を用いるとラグランジュ乗数が得られる。求めた値を用いて式(3)を各位置における各方向の絶対透水係数で微分すると以下のような勾配計算式が得られる。

$$\frac{\partial L}{\partial kx_{i+\frac{1}{2},j,k}} = \sum_{n=1}^{nmax} (\lambda_{i,j,k}^n - \lambda_{i+1,j,k}^n) (\varphi_{i+1,j,k}^n - \varphi_{i,j,k}^n) \frac{\Delta y_j \Delta z_k k_r \left(S_w \left(\varphi_{i+\frac{1}{2},j,k}^n \right) \right)}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial ky_{i,j+\frac{1}{2},k}} = \sum_{n=1}^{nmax} (\lambda_{i,j,k}^n - \lambda_{i,j+1,k}^n) (\varphi_{i,j+1,k}^n - \varphi_{i,j,k}^n) \frac{\Delta x_i \Delta z_k k_r \left(S_w \left(\varphi_{i,j+\frac{1}{2},k}^n \right) \right)}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial kz_{i,j,k+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{nmax} (\lambda_{i,j,k}^n - \lambda_{i,j,k+1}^n) \left(\frac{\varphi_{i,j,k+1}^n - \varphi_{i,j,k}^n}{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}} + 1 \right) \cdot \Delta x_i \Delta y_j k_r \left(S_w \left(\varphi_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n \right) \right) \quad (7)$$

3. 三次元モデルを用いた数値実験

3.1 地下水モデル

作成した逆解析プログラムの妥当性を検討するために均一な物性値を与えた三次元モデルを用いて数値実験を行った。モデルには、解析領域を 50m×50m×20m の立方体とし各セルを 10m×10m×1m の合計 500 セルに分割した三次元モデルを使用した。比貯留係数は全セルで 0.02 (1/m)，絶対透水係数は異方性を考慮して水平方向の各セル間で 5.0×10^{-4} (m/s)，鉛直方向の各セル間で 5.0×10^{-5} (m/s) とそれぞれ均質に与えた。また初期自由地下水面を底部から 15m に設定した。 x, y 方向の端は固定水頭， z 方向の端は閉境界とした。

3.2 解析条件

揚水地点を底部と底部から 5m の位置に各 5 セル設置し、揚水量を 0.001 (m³/s) とした。時間間隔を 100 秒とし、10000 秒間(タイムステップ 100)揚水を行った。また観測地点を底部と底部から 1, 3, 5, 8, 11m の位置に各 5 セル設置し、順解析の計算値を与えた。水平方向の揚水地点および観測地点を図-2 に示す。各セル間の絶対透水係数を未知パラメータとし、その個数は x, y 方向が 400， z 方向が 500 の合計 1300 とした。絶対透水係数の初期推定値は水平方向の各セル間で 7.0×10^{-4} (m/s)，鉛直方向の各セル間で 7.0×10^{-5} (m/s) と与えた。以上の条件のもと逆解析を行った。

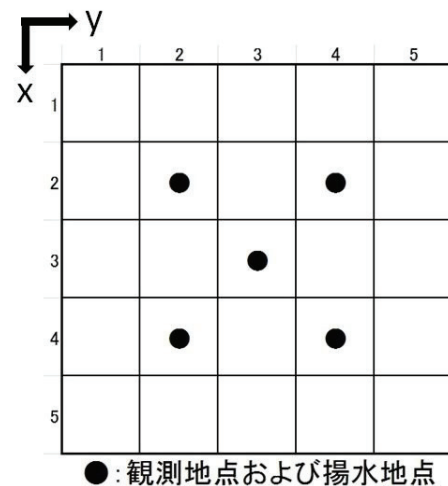


図-2. 水平断面図

3.3 解析結果および考察

準ニュートン法の各反復毎の目的関数を図-3に、逆解析前と逆解析後の圧力水頭マッチングの結果の一部を図-4に示す。図-3より逆解析によって目的関数が十分に減少したことが確認される。また、図-4より逆解析前は一致していない計算圧力水頭と観測圧力水頭が逆解析によって一致したことが確認される。以上より、本研究で開発した逆解析プログラムが飽和・不飽和領域において正しく作動していることが示された。

次に、逆解析によって推定された x, z 軸方向の絶対透水係数を図-6, 7に、正解値を図-5に示す。図-6より x 軸方向の絶対透水係数は自由地下水面より下部において正解値に近い値が推定された。しかし自由地下水面より上部においては推定結果の精度が悪く、初期推定値からの変化がほとんどないことが確認される。これは不飽和領域内の地下水流動が乏しいためだと考えられる。また、図-7より z 軸方向の絶対透水係数も x 軸方向と同様に自由地下水面より下部において正解値に近い値が推定されたが x 軸方向に比べると推定結果の精度が悪い。これは z 軸方向の絶対透水係数が x 軸方向に比べて小さいこと、鉛直方向に比べて水平方向の地下水流動が大きいことが理由と考えられる。

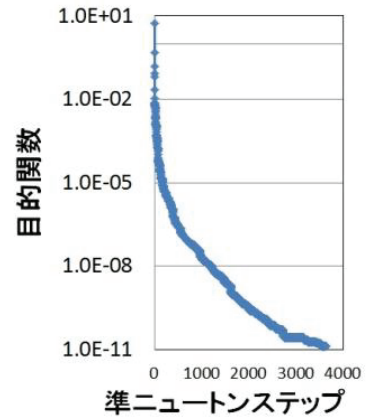


図-3. 目的関数の変化

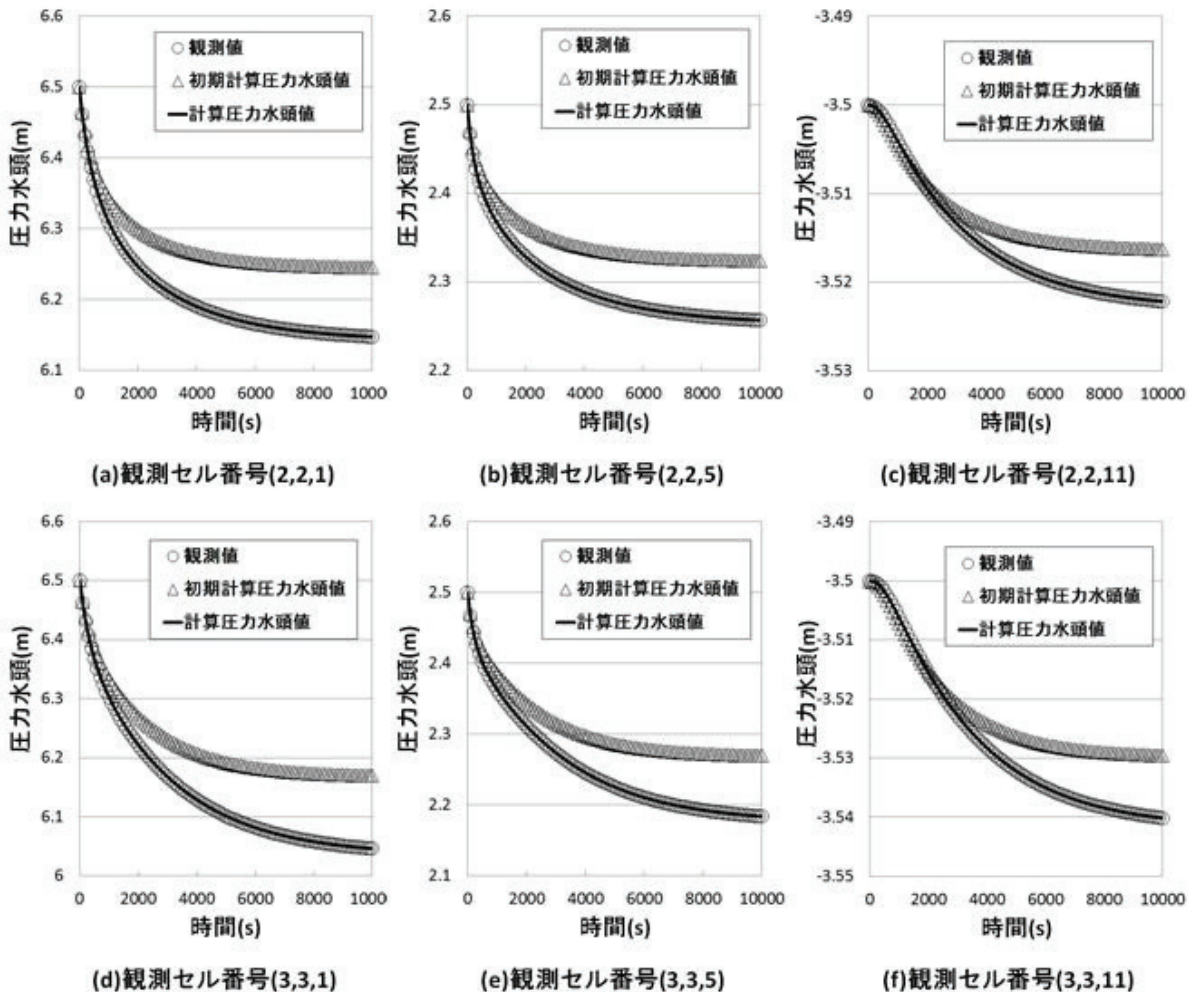
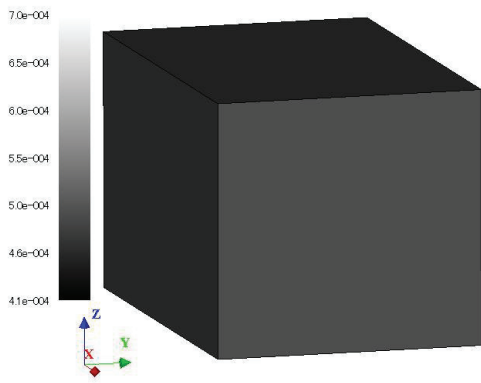
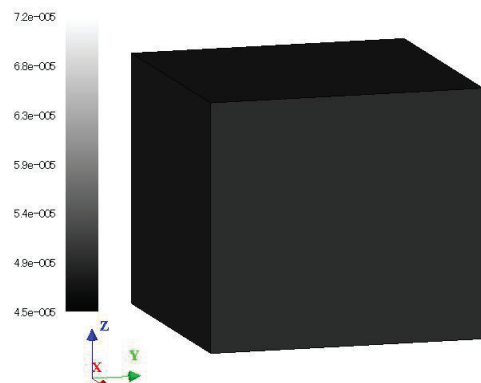


図-4. 圧力水頭マッチング



(a) x 軸方向の絶対透水係数



(b) z 軸方向の絶対透水係数

図-5. 絶対透水係数の正解値

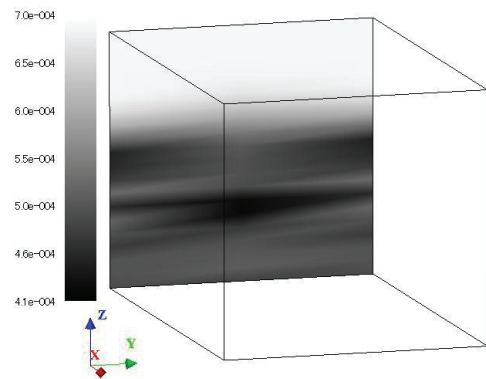
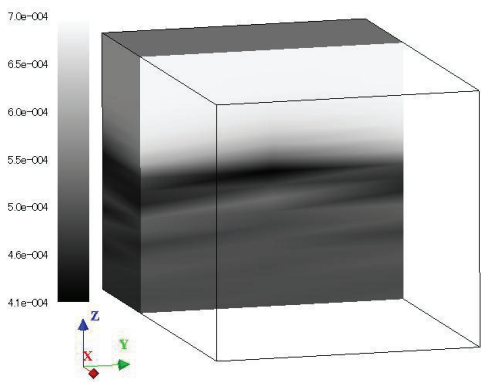
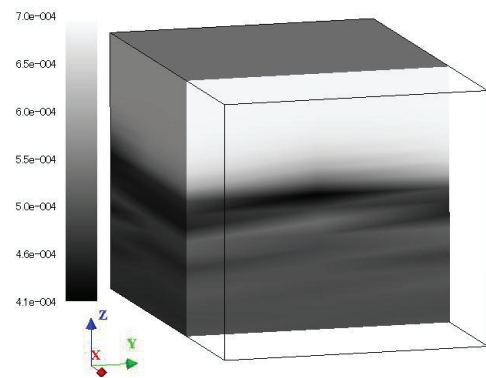
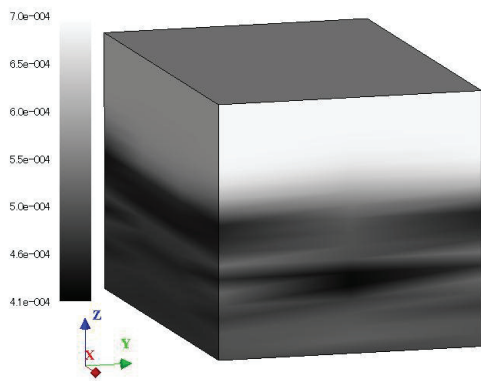


図-6. x 軸方向絶対透水係数の推定結果

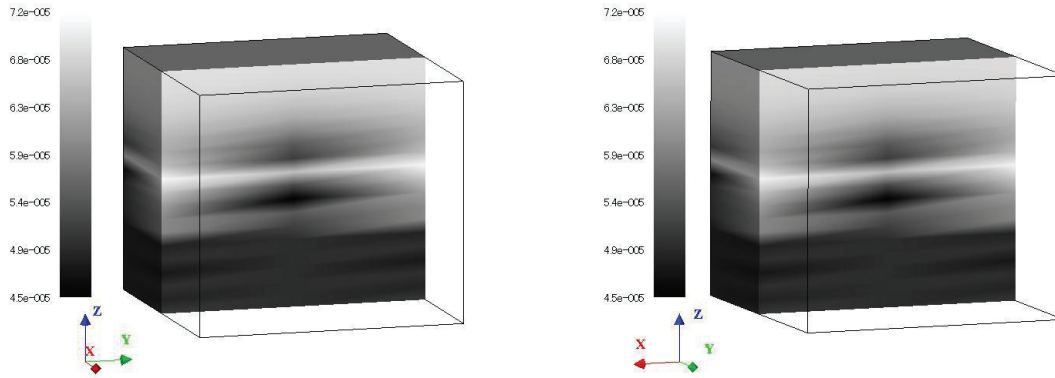


図-7. z 軸方向絶対透水係数の推定結果

4. おわりに

準ニュートン法と adjoint 法を用いて飽和・不飽和浸透流逆解析プログラムを作成した。作成したプログラムを用いて三次元モデル数値実験を行った結果、圧力水頭を精度よくマッチングでき、プログラムが正しく作動することが示された。また、不飽和領域および鉛直方向の未知パラメータは設定した試験条件では、逆解析による推定精度が悪いことが示された。

引用文献

- 1) 増本清, 登坂博行, 小島圭二 (1998) : 多点非定常圧力とその時間変化率の同時自動マッチングによる岩盤水理特性逆解析—3次元基本アルゴリズムの開発—, 日本地下水学会誌, Vol. 40, No. 3, pp. 273–287.
- 2) P. S. ファコーン, G. F. ピンダー(1987) : 地下水解析の基礎と応用 上巻 基礎編, 現代工学社, p. 146–157.
- 3) 茨木俊秀&福島雅夫(1991) : Fortran77 最適化プログラミング, 岩波書店, p. 141–166
- 4) 増本清 (2004) : 地下水理逆解析における計算記憶容量節約アルゴリズム, 応用力学論文集, Vol. 7, pp. 191–199.