

P8. 不均質な水理物性値分布の有限要素逆解析数値実験

Finite element inverse analysis of heterogeneous hydraulic property distribution

○高月孝昭・増本清(島根大学大学院)

1. はじめに

地下水の過剰採取によって生じる地下水位の低下といった諸問題において、有限要素法などにより地下水帯水層をモデル化し、地下水の挙動予測を行う必要がある。この予測には現地調査により得られた帯水層の情報を用いて作成した地下水モデルを用いる。しかし、現地調査で得られる情報量には限度があり、情報の不足分を適当な数値で当てはめてしまうため、モデル誤差が生じやすい。この問題を解決するために観測された水理水頭の情報から透水係数を推定するような逆解析が有効と考えられる。

逆解析は従来から地下水流動解析で利用されている有限差分法を用いた研究が多くあるが、有限差分法は解析領域を正四角形で分割するため、複雑な形状を有する領域に対応しにくい。一方、有限要素法は対象領域を任意形状の要素で分割することができるため、帯水層の地層構造や境界の形状が複雑であっても数値シミュレーションに適切に導入することができる。したがって、有限要素法による逆解析も有効であると考えられる。

有限要素法で逆解析を行うには、計算時間が膨大になるといった問題を解決する必要がある。これは、逆解析を行うために勾配法である準ニュートン法により未知パラメータを推定しているためである。差分近似による勾配計算であればプログラム作成は容易だが、一回の勾配計算が未知パラメータの個数だけ順解析を行う必要があり計算量が膨大である。そこで、勾配計算を効率化する手法として ajoint 法を適用した。勾配計算に ajoint 法を導入するにあたり、有限要素法による随伴方程式や勾配計算を定式化する必要がある。この定式化はラグランジュ関数にガラーキン法により離散化した式を取り込むことにより行うことができる³⁾。これにより勾配計算にかかる時間を大幅に短縮でき、不均質モデルに対応した多数の未知パラメータ数の逆解析が可能となることが期待される。

本論文では、有限要素法による逆解析プログラムの作成方法と、作成した逆解析プログラムを用いて水理物性値が不均質な三次元モデルにおける逆解析数値実験を行った。

2. 有限要素逆解析プログラムの概要

2. 1 逆問題の定式化

地下水流動を支配する方程式は、ダルシーの法則と連続の式より以下の式で表される。

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) - Q \quad (1)$$

ここに、 k_x, k_y, k_z : x, y, z 軸方向の透水係数、 S_s : 比貯留係数、 h : 水理水頭、 t : 時間、 Q :

揚水、涵養量 をそれぞれ表す。この支配方程式を有限要素法などにより離散化を行い、離散化した式に透水係数や貯留係数などの水理物性値を入力し、適当な初期条件、境界条件のもとに解くことにより水理水頭 h について得ることが順解析である。ここでは有限要素法の主な手法であるガラーキン法を適用して離散化を行う。支配方程式をガラーキン法により離散化した式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^M \sum_{j=1}^N S_S^e \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j d\Omega_e \frac{h_j^k - h_j^{k-1}}{\Delta t} + \sum_{e=1}^M \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_e} \left(k_x^e \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + k_y^e \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + k_z^e \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) d\Omega_e h_j^k \\ + \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma} q^e \varphi_i d\Gamma + \sum_{e=1}^M \int_{\Omega_e} Q^e \varphi_i d\Omega_e = R_i \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, N), (k = 1, \dots, K) \quad (2)$$

ここに、 N ：全節点数、 k ：時間ステップ、 K ：全時間ステップ、 e ：要素番号、 M ：全要素数、 Ω_e ：要素 e の領域、 Γ ：境界、 q ：境界からの流入、流出 であり、右辺を R_i とおいた。

ここで行う逆解析は、順解析で得られた水理水頭と観測によって得られた水理水頭の重み付き残差二乗和を目的関数として導入し、これが最小となる未知パラメータを求めるような逆問題を解くことである。目的関数の具体形は以下のように表される。

$$J = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K W_i^k (h_{sim,i}^k(u) - h_{obs,i}^k)^2 \quad (3)$$

ここに、 $h_{obs,i}^k$ ：節点番号 i において観測された水理水頭、 $h_{sim,i}^k$ ：節点番号 i において順解析で得られる水理水頭、 u ：未知パラメータベクトル、 W_i^k ：重み をそれぞれ表す。 W_i^k は節点 i が観測点に含まれない場合は0とする。また、本論文では未知パラメータとして、各要素 e における透水係数を対数で変数変換したものとして扱った。

$$u = (\log k_x^1, \dots, \log k_x^M, \log k_y^1, \dots, \log k_y^M, \log k_z^1, \dots, \log k_z^M) \quad (4)$$

この逆問題は制約条件付非線形最小化問題として分類されるため、勾配法の一つである準ニュートン法を用いて逆問題を解く。また、準ニュートンのアルゴリズムは茨木ほか(1991)¹⁾を、逆解析プログラムの詳細な仕組みについては増本(2004)²⁾を参照されたい。

2. 2 ajoint 法による勾配計算

逆問題の解法として勾配法である準ニュートン法を適用しているため，目的関数の未知パラメータによる勾配値が必要となる．ajoint 法は新たにラグランジュ乗数 λ_i^k を導入し，勾配値を計算する方法である．ラグランジュ関数 L の具体形は以下のように表される．

$$L = J + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \cdot R_i^k \quad (5)$$

ここに， J ：目的関数， λ_i^k ：ラグランジュ乗数， R_i^k ：支配方程式を離散化した式， i ：節点番号， N ：節点数， k ：時間ステップ， K ：全時間ステップ数 である．ラグランジュ関数を(5)式とおくことにより，随伴方程式を以下のように表される．

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial h_a^b} &= 2W_i^k (h_{sim,i}^k - h_{obs,i}^k) + \sum_{e=1}^M \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_e} S_S^e \varphi_i \varphi_j d\Omega_e \frac{\lambda_j^k - \lambda_j^{k+1}}{\Delta t} \\ &+ \sum_{e=1}^M \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_e} \left(k_x^e \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + k_y^e \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + k_z^e \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) d\Omega_e \lambda_j^k = 0 \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, N), (k = 1, \dots, K) \quad (6)$$

ここに， a ：節点番号， b ：時間ステップ である．

この(6)式は終末条件($\lambda_i^{K+1} = 0$)を与え，順解析と同様の解法を用いることにより逆時間ステップごとにラグランジュ乗数 λ_i^k を数値的に解くことができる．次に勾配計算式は異方性を考慮すると以下のように表される．

$$\frac{\partial L}{\partial u^e} = \frac{\partial L}{\partial k_x^e} \cdot \frac{\partial k_x^e}{\partial u^e} = \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \cdot \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) d\Omega_e h_j^k \right\} \cdot k_x^e \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^e} = \frac{\partial L}{\partial k_y^e} \cdot \frac{\partial k_y^e}{\partial u^e} = \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \cdot \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) d\Omega_e h_j^k \right\} \cdot k_y^e \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^e} = \frac{\partial L}{\partial k_z^e} \cdot \frac{\partial k_z^e}{\partial u^e} = \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \cdot \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) d\Omega_e h_j^k \right\} \cdot k_z^e \quad (9)$$

この勾配計算式は、すでに随伴方程式により得られているラグランジュ乗数 λ_i^k と順解析により得られている水理水頭 h_i^k を用いることにより計算することができる。このように有限要素法においても離散化した式を組み込んだラグランジュ関数を用いて、adjoint法による勾配計算が可能である。なお、adjoint法の詳細および理論は増本(2009)³⁾に基づく。

3. 不均質地盤を対象とした三次元数値実験

3. 1 有限要素モデル作成・観測データの作成

今回の数値実験に使用した地下水モデルはメッシュ作成ソフトである Lisa (lisafea.com) を使用し 500m×500m×500m のモデルを作成した。要素数は 384 個、未知パラメータ数は 1152 個である。作成した有限要素モデルを図 1 に示す。作成したモデルの構成はモデル上下に異なる透水係数を持つゾーン (Zone1, Zone2) と断層を想定した低透水性を持つゾーン (Fault1) として設定を行った。また、比貯留係数はモデル内で均一で設定した。透水係数などの詳細な値については表 1 に示す。逆解析で入力する透水係数の初期推定値は全要素に $\log k = -7.0$ として均一に与えた。境界条件はモデルの上面と底面、上下側面に閉境界、左右側面 ($x=0$, $x=500$) に定水頭境界として設定した。

次にモデル内に設定した観測孔と揚水孔を図 2 に示す。観測データはこの揚水孔から 0.04m³/sec の揚水を 20 時間継続し、その後、揚水を止めるような回復試験を揚水孔ごとで行うことにより得られる水理水頭の非定常データを観測データとして逆解析を行った。時間ステップは 1 ステップの間隔を 1 時間として設定した。

3. 2 目的関数, 水理水頭マッチングの結果および考察

反復計算ごとの目的関数の推移を図 3 に、揚水孔 pump_No1 で揚水したときの pump_No2~pump_No6 における観測水頭と修正結果を時間ステップごとに比較したものを図 4 に示す。目的関数が反復計算のステップごとに目的関数が減少していることと、観測水頭と順解析により得ら

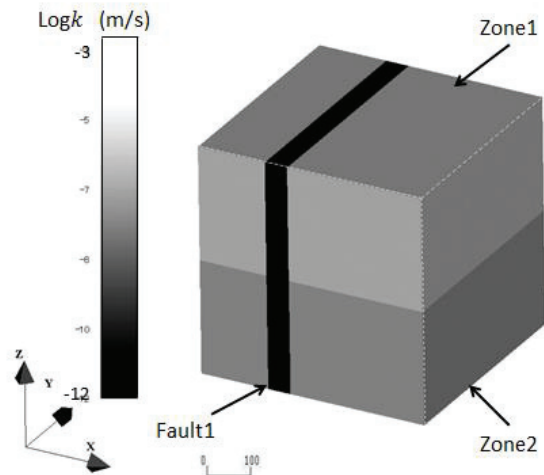


図 1 モデル全景と透水係数の真値分布図

表 1 区分ごとに設定した水理物性値の真値

	$\text{Log}k_x$	$\text{Log}k_y$	$\text{Log}k_z$	$\text{Log}S_y$
Zone1	-6.0	-6.0	-6.0	-6.5
Zone2	-7.0	-7.0	-7.0	-6.5
Fault1	-10.5	-10.5	-10.5	-6.5

れる水頭の値がある程度一致していることにより逆解析が正常に行われていることがわかる。

3.3 透水係数分布の推定結果および考察

k_x , k_y , k_z それぞれの透水係数分布の全景と、z軸250mで断面を取ったものを図5に示す。図5(a)より、Fault1で設定した付近の値が低くなっていることや、モデル上方が下方よりも透水係数の値が大き

くなっていることがわかる。これにより k_x についてはモデル内に設定した Zone1とZone2, Fault1をよく再現できていることがわかる。一方、図5(b), (c)では初期の透水係数から修正があまり行われていないことがわかる。これにより k_y , k_z については推定結果が良好でないことがわかる。 k_x のみの推定結果が良好となった理由として、固定水頭境界をモデル左右側面($x=0$, $x=500$)に設定していることにより、x軸方向の水の流れがy軸方向とz軸方向の水の流れよりも大きくなるため、 k_x のみが良好な推定結果を得られたと考えられる。 k_y , k_z についても良好な結果を得るためには、 k_y , k_z を推定できるような観測情報を得る必要があると考えられる。

4 結論

有限要素法を用いて準ニュートン法とadjoint法を組み合わせた三次元地下水流動逆解析プログラムを開発した。また、このプログラムを用いて多数の未知パラメータ数をもつ不均質な地盤を対象とした数値実験を行うことにより以下の結論

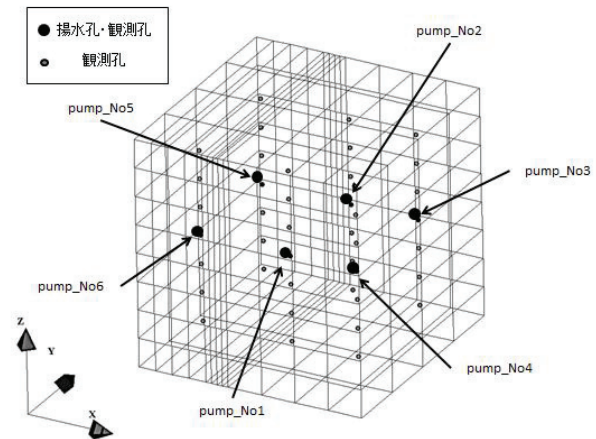


図2 モデル内の観測孔と揚水孔の位置・揚水孔番号

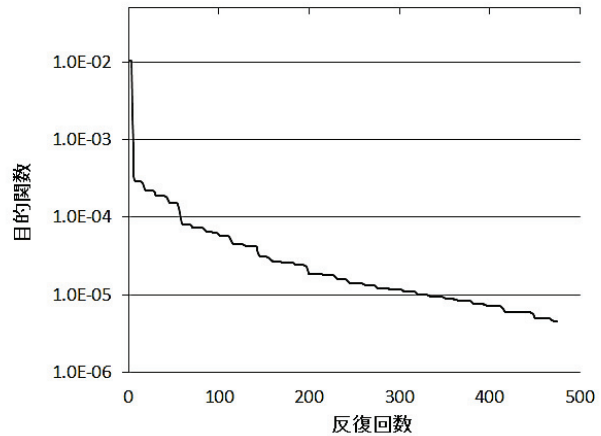


図3 目的関数の推移

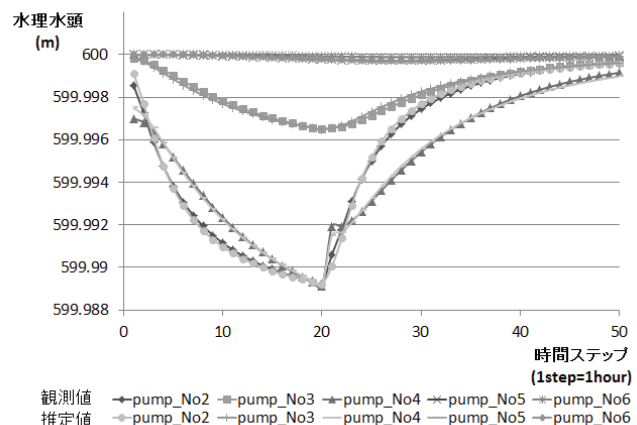


図4 水理水頭マッピング結果

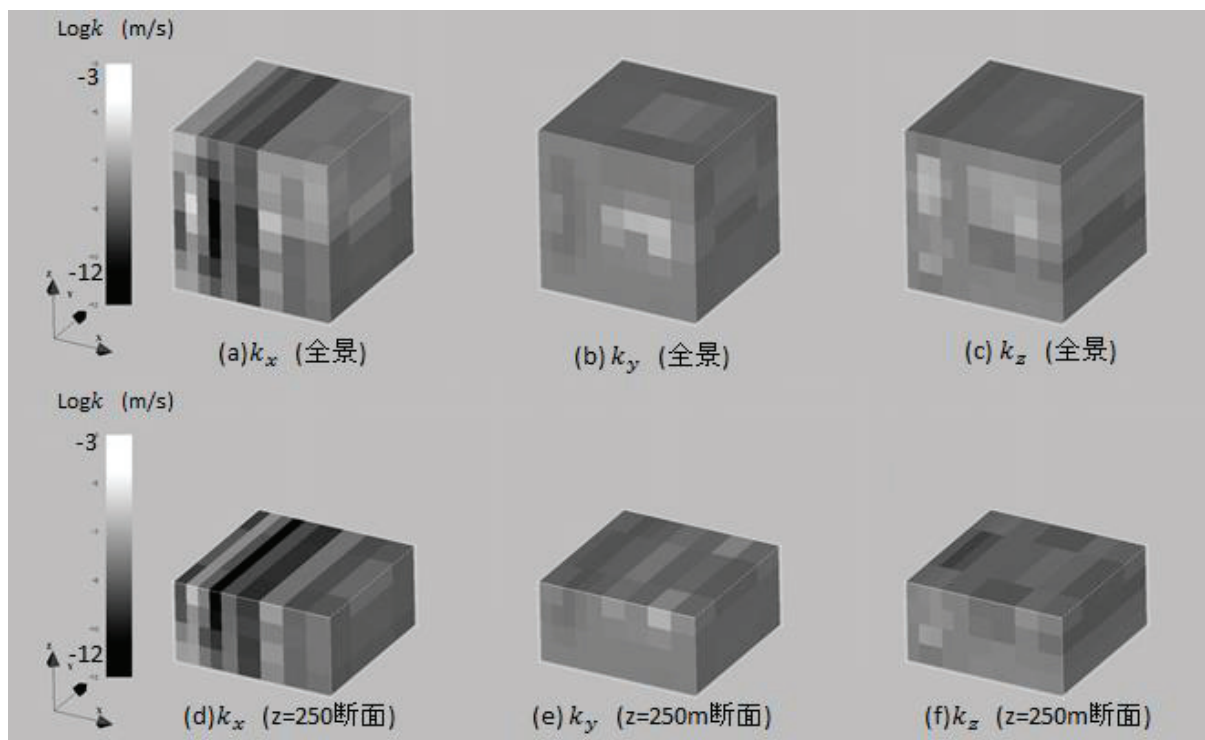


図5 モデル全景とz軸=250m断面における推定透水係数分布図

が得られた。

- (1) 良好な水理水頭マッチング結果が得られたことより, 開発したプログラムが順解析の水理水頭結果と観測された水理水頭が一致するような透水係数分布を推定することが可能であることを示した。
- (2) 有限要素法で順解析を行うために必要な不均質な透水係数分布を本逆解析プログラムによりある程度推定できることが示された。

参考文献

- 1) 茨木俊秀, 福島雅夫 (1991) : FORTRAN 77 最適化プログラミング, 岩波書店, pp141-166.
- 2) 増本清 (2004) : 地下水理逆解析における計算記憶容量節約アルゴリズム, 応用力学論文集, Vol, 7, pp.191-199.
- 3) 増本清 (2009) : 地下水のトレーサー試験～地下水の動きを知る～, 日本地下水学会原位置トレーサー試験に関するワーキンググループ編著, 第8.2節, 逆解析による水理特性パラメータの評価, pp195-214, 技報堂出版.