9.陽解法と陰解法の組合せによる地下水流動解析の効率化

Efficiency of ground water flow analysis by combining explicit and implicit methods.

〇岩田太郎・増本清（島根大学大学院自然科学研究科環境システム科学専攻）

1.　はじめに

差分法による非定常地下水流動解析では，陽解法や陰解法がある．時間ステップ一回分の計算において，陰解法は，連立方程式を解くため計算時間を要する．一方，陽解法は，直接計算であるため計算時間は短いが，時間ステップの大きさに制約があり，安定基準を満たす必要がある．透水量係数が大きい場合や，セルの大きさが小さい場合は，安定基準を満たすために時間ステップの大きさを小さくする必要があり，計算全体の反復回数が増大し計算時間を要する．また、不均質な物性パラメータを推定する際に用いられる逆解析においても順解析の繰り返し計算が必要であるため，逆解析を短時間で行うには，順解析の計算量を削減する必要がある．そこで本研究では，モデル領域内に陽解法・陰解法を組合せた順解析プログラムを作成し，これを用いた水平 2 次元モデルによるパルス試験を想定した数値実験を行い，陽解法・陰解法組合せによる計算時間の効率化と安定性について検討した．

2.　陽解法・陰解法の組合せ数値解法

差分法による非定常地下水流動解析における，水平 1 次元における陽解法で離散化した差分方程式を式(1)に，陰解法で離散化した差分方程式を式(2)に，それぞれ示す．

$$\frac{S_i}{\Delta t}h_i^n = \frac{TI_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}h_{i-1}^{n-1} + \left(-\frac{TI_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} - \frac{TI_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \frac{S_i}{\Delta t}\right)h_i^{n-1} + \frac{TI_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}h_{i+1}^{n-1} + q_i^n \tag{1}$$

$$\frac{TI_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}h_{i-1}^{n} + \left(-\frac{TI_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} - \frac{TI_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} - \frac{S_i}{\Delta t}\right)h_i^{n} + \frac{TI_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}h_{i+1}^{n} = -\frac{S_i}{\Delta t}h_i^{n-1} - q_i^n \tag{2}$$

ここに、i：x方向のセル番号　n：時間ステップ番号　Δx：x方向のセルの大きさ〔m〕
S：貯留係数　Δt：時間ステップの幅〔s〕　h：水理水頭値〔m〕　q：揚水量（かん養量を正、揚水量を負とする）〔m^3/s〕　TI：x方向のセル間の透水量係数（図 1 を参照）〔m^2/s〕

また，陽解法の安定基準式を式(3)に示す．

$$\frac{T}{S}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 0.5 \tag{3}$$

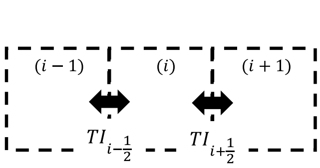

図 1　セル間の透水量係数

ここにT：セルの透水量係数〔m^2/s〕　S：貯留係数

本研究では，セル毎に判定を行い，式(3)を満たすセルは陽解法で，満たさない要セルは陰解法を設定するように設定を行った．順解析では，時間ステップごとに陽解法の計算を行い，その後，陰解法を計算する必要がある．これは，陽解法で計算した結果を陰解法の既知境界条件として使用するためである．例として，セル(i)と$(i+1)$を陰解法で，セル$(i-1)$を

陽解法で計算した場合の離散化した差分方程式を式(4)に示す．

$$\left(-\frac{TI_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}-\frac{TI_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}-\frac{S_i}{\Delta t}\right)h_i^n+\frac{TI_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}h_{i+1}^n=-\frac{S_i}{\Delta t}h_i^{n-1}-\frac{TI_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}h_{i-1}^n-q_i^n \qquad (4)$$

この場合，h_{i-1}^nを陽解法で計算しているため陰解法では既知条件として計算することが可能となる（図2）．作成したプログラムのフローチャートを図３に示す．

これらのことは，水平２次元におけるy方向についても同様である．

3.　水平２次元モデルを用いた数値実験

3-1.　解析モデルと条件

本研究では，揚水回復を繰り返すパルス試験を想定した数値実験を行った．モデルは$2100m\times2100m$の領域を25×21セルに分割し，領域内に揚水点を３点配置した（図４）．それぞれの揚水点での揚水量を図５に示す．モデルに与えたパラメータを表１に示す。陽解法・陰解法の判定に関しては，各セルに式(3)の安定基準を適用し判定を行った。全領域に陽

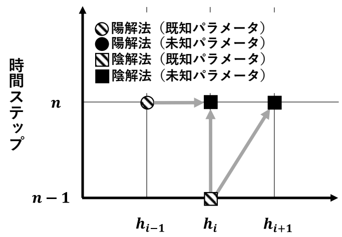

図２　陽解法・陰解法組合せ概念図

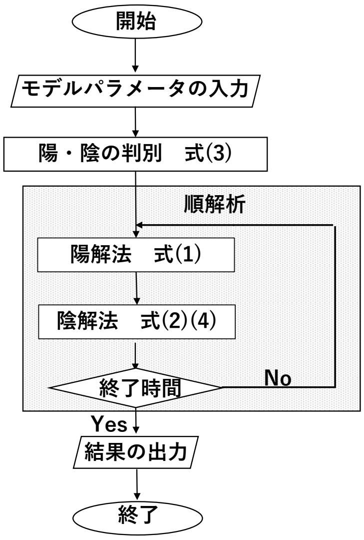

図３　陽解法・陰解法組合わせプログラムのアルゴリズ

表１　モデルパラメータ

要素の個数（個） x方向	要素の個数（個） y方向	要素の大きさ（m） Δx(m)		要素の大きさ（m） Δy(m)	初期水頭値(m)	貯留係数	透水量係数（m^2/s） 高透水層	透水量係数（m^2/s） 低透水層	実験時間
25	21	100	20	100	100	4.0×10^{-4}	0.2	0.01	10000秒

解法のみを用いる場合(全領域安定)，陰解法のみを用いる場合を含むため(全領域不安定)，時間ステップ幅Δtを 0.1 秒から 500 秒の９パターンで数値実験を行い計算時間と水理水頭値の経時変化を検討した．また，組合せ法とは別に、比較のため陰解法のみを使用するプログラムで時間ステップ幅が 50 秒・100 秒の場合（caseJ・caseK）の数値実験を実施した．各 case の実験条件を表２に示す．

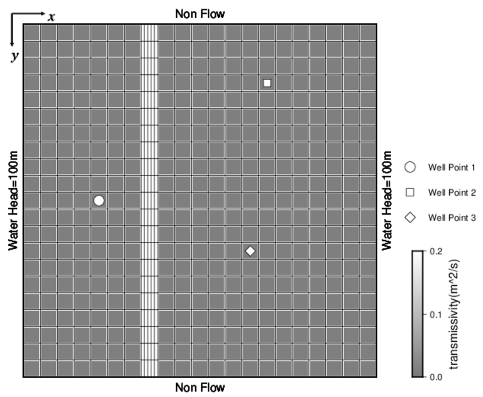

図４　２次元数値実験に使用したモデル

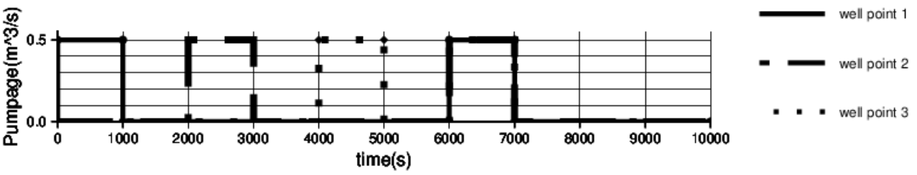

図 5　揚水方法

3-2.　結果と考察

表 2　数値実験条件

case番号	時間ステップ幅	解法（陰解法の要素の割合）
A	0.1秒	組合せ（0%：陽解法）
B	0.2秒	組合せ（0%：陽解法）
C	0.5秒	組合せ（20%）
D	1秒	組合せ（20%）
E	10秒	組合せ（28%）
F	50秒	組合せ（28%）
G	100秒	組合せ（28%）
H	200秒	組合せ（100%：陰解法）
I	500秒	組合せ（100%：陰解法）
J	50秒	陰解法（ー）
K	100秒	陰解法（ー）

表 2 に示すように本数値実験に用いたモデルにおいてセル毎に式(3)を用い，自動的に陽解法・陰解法の判別を行った結果，陰解法で計算するセルの割合は，$\Delta t < 0.5$の場合 0%，$0.5 \leq \Delta t < 10$の場合 20%，$10 \leq \Delta t < 100$の場合 28%$100 < \Delta t$の場合 100%となった．解法ごとの，時間ステップ幅と計算時間の関係を図 6 に示す．時間ステップ幅 50 秒と 100 秒において，組合せ法は，陰解法に比べ短時間で計算されたことがわかる．各 case の計算時間に対する，陽解法の計算・連立方程式の作成・連立方程式を解く時間の内訳を図 7 に示す．組合せ法で時間ステップ幅 100 秒(caseG:陰解法 28%)は，組合せ法で時間ステップ幅 200 秒(caseH:陰解法 100%)よりは短時間で計算を行えたが，組合せ法で時間ステップ幅 500 秒(caseI:陰解法 100%)よりは計算に時間がかかったことが分かる．組合せ法時間ステップ幅 50 秒(caseF)，100 秒(caseG)，500 秒(caseI)の揚水井における水理水頭値の経時変化を図 8 に示す．図 8 (a)は，陽解法では，一部領域で安定基準を満たさない時間ステップ幅を用いたが，組合せ法を用いることで，振動が見られず妥当な計算結果を得ることができた．また，図 8 (b)は，6000 秒付近など水理水頭値の一部に振動が見られる．これは，陽解法の安定基準を満たす

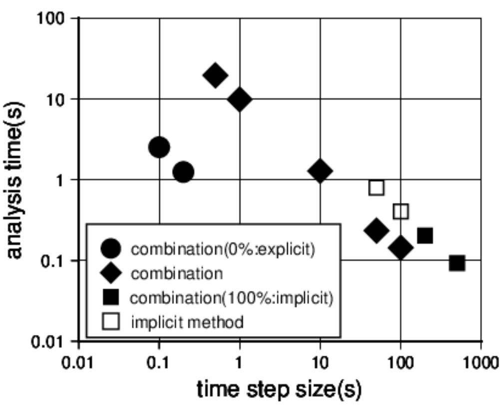

図 6　時間ステップ幅と計算時間の関係

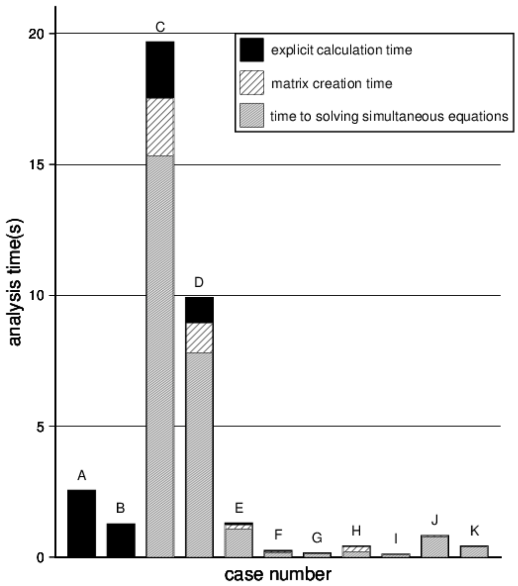

図 7　case 毎の解析時間の内訳

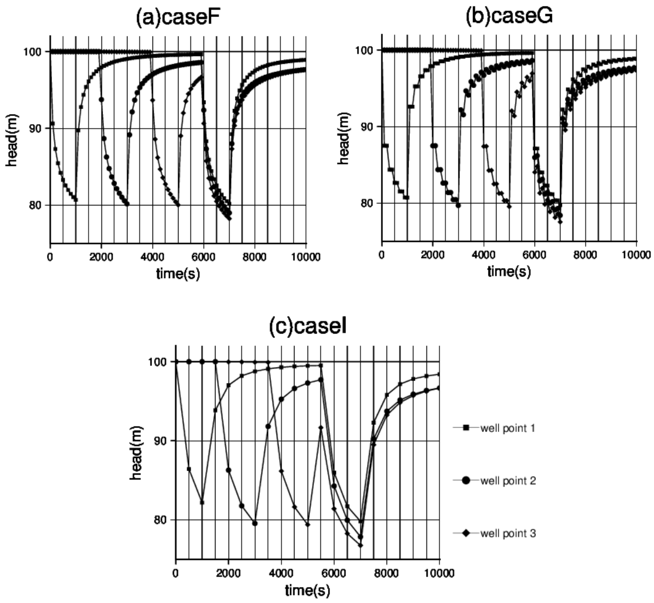

図８　水頭値の経時変化

最大の時間ステップ幅を用いたために不安定になったと考えられる．図８(c)は，図８(a)と比較すると水理水頭値にずれがあることがわかる．時間ステップ幅が大きいため離散化による誤差が生じている可能性がある．以上より，本数値実験で用いたモデルでは，陰解法を用いるよりも時間ステップ幅を小さくし組合せ法を用いた方が，計算時間が短時間の場合があるといえる．また、本数値実験で用いたモデルでは，精度を保証するため時間ステップ幅を小さくする場合において，組合せ法が効果的であるといえる．

4.　結論

陽解法・陰解法の組合せによる差分法地下水流動解析プログラムを作成し、数値実験を行い以下の結論を得た．

(1) 陽解法・陰解法組合せ法は，安定基準に近い場合，水理水頭値の振動が見られるが，陽解法では不安定となる時間ステップ幅において，効率的に妥当な計算結果が得られる．

(2) 不均質領域で，計算精度を保証するために小さな時間ステップを用いる場合，組合せ法は，陰解法で計算を行うより効率的な場合がある．

今後，陽解法・陰解法組合せ法を，adjoint 法を用いた逆解析に組み込み，逆解析における効率化と推定精度について検討する予定である．

参考文献

１） W.キンツェルバッハ(1990):パソコンによる地下水解析，上田年比古監修，森北出版，286Ｐ．

２） 増本清(2009):地下水トレーサー試験，日本地下水学会原位置トレーサー試験に関するワーキンググループ編著，第８.2 節，逆解析による水理特性パラメータの評価，技報堂出版，pp.195-214.

３） 恩田祐，安斎浩一(2006):陰解法と陽解法の混用による差分法凝固解析の高速化，鋳造工学特集「鋳造シミュレーションの活用」,pp648-653.